Die Hadamard-Transformation

... ist eine orthogonale, reelle Transformation. Sie besteht aus Basisfunktionen, die nur die werte “1” und “-1” annehmen können. Reelle Transformation bedeutet, dass bei der Transformation nur ein Amplitudenspektrum entsteht, kein Phasenspektrum.

Die verwendeten Transformationsfunktionen basieren auf den sogenannten Walsh-Funktionen, allerdings in geänderter Reihenfolge.

Bildungsgesetze für Hadamard-Matrizen :

1. Beispiel für die ersten vier Matrizen :

$$[\ H(0)\ ] = [\ 1\ ]$$

$$[\ H(1)\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\ H(2)\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\ H(1)\ ] & [\ H(1)\ ] \\ [\ H(1)\ ] & -[\ H(1)\ ] \end{bmatrix}$$

$$[\ H(3)\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\ H(2)\ ] & [\ H(2)\ ] \\ [\ H(2)\ ] & -[\ H(2)\ ] \end{bmatrix}$$

daraus abgeleitet : Allgemeines Bildungsgesetz :

$$[\,H(m+1)\,] = \begin{bmatrix} [\,H(m)\,] & [\,H(m)\,] \\ [\,H(m)\,] & -[\,H(m)\,] \end{bmatrix} \qquad \text{mit } m = 0,\ 1,\ ....$$

$$\text{oder : } [\,H(m)\,] = [\,H(1)\,] \# [\,H(m)\,]$$

$$= \underbrace{[\,H(1)\,] \# [\,H(1)\,] \# [\,H(1)\,] \# \ldots \# [\,H(1)\,]}_{<\quad m - \text{mal}\quad >}$$

Anmerkung: Die mathematische Operation # bezeichnet das Kronecker-Produkt !

Alternative Erzeugung von Hadamard-Matrizen nach Cohn und Lempel :

Basis-Spaltenvektor : $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Basis-Zeilenvektor : $[\,0 \quad 1\,] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T$

$$[\,H(1)\,] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * [\,0 \quad 1\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definition : 0 -> 1 ; 1 -> -1

$$[\,H(1)\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Entsprechend gilt für die Hadamard-Matrix 2er Ordnung :

$$[\ H(2)\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

0 -> 1 ; 1 -> -1 , also : $[\ H(2)\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Allgemeine Berechnung der Elemente einer Hadamard-Matrix [H(L)] :

$$h\ (k\ ,\ n) = (-1)^{\sum_{i=0}^{L-1} k_i , n_i}$$

wobei k für die jeweilige Zeile und n für die jeweilige Spalte der NxN-Matrix steht

Eigenschaften von Hadamard-Matrizen :

- quadratisch (wie oben gesehen)
- orthogonal :

$$[\ H(L)\ ] * [\ H(L)\ ] = N*I$$

wobei N die Anzahl der Zeilen, bzw. Spalten angibt und I eine entsprechende Einheitsmatrix bezeichnet. Zusammenhang zwischen L und N : $L = lb\ (N)$

Entwicklung von schnellen Algorithemen :

Rechenaufwand für die normale Transformation : N^2 Operationen, bei einer [H(2)]-Matrix also 16

Ansatz für schnelle Algorithmen : Zerlegung einer [H(L)]-Matrix in L Faktoren :

Beispiel : $\quad [\,H(2)\,] = [\,H(1)\,] \,\#\, [\,H(1)\,]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * [\,H(1)\,] \,\#\, [\,H(1)\,] * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Durch die Multiplikation mit der Eiheitsmatrix ändern sich die beiden Hadamard-Matrizen nicht.
Für die Operatoren “*” und “#” gilt das Assoziativgesetz :

$$[\,H(2)\,] = [\,H(1)\,] \,\#\, [\,H(1)\,]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\#\, [\,H(1)\,] * [\,H(1)\,] \,\#\, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Durch die Zerlegung der Hadamard-Matrix in L = lb(N) Faktoren sind für die Berechnung nur noch N * lb(N) Rechenoperationen erforderlich, da in jeder Reihe und jeder Spalte nur 2 Elemente ungleich Null sind.
Für den obigen Fall kann ein Signalflussdiagramm aufgestellt werden, welches wie folgt aussieht :